УДК 532, 517.958

КВАЗИГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И ГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Сухомозгий А.А., Шеретов Ю.В.
Кафедра математического анализа

Поступила в редакцию 03.10.2011, после переработки 25.11.2011.

Предложен новый метод построения точных решений стационарных квазигидродинамических уравнений с помощью гармонических функций. Все найденные решения удовлетворяют также соответствующим системам Эйлера и Навье–Стокса.

New method of constructing the exact solutions for stationary quasi-hydrodynamic equations with the help of harmonic functions is proposed. All found solutions also satisfy to corresponding Euler and Navier–Stokes systems.

Ключевые слова: уравнения Навье–Стокса, квазигидродинамические уравнения, гармонические функции, точные решения.
Keywords: Navier–Stokes equations, quasi-hydrodynamic equations, harmonic functions, exact solutions.

Введение

Методы теории функций широко применялись при построении точных решений классических моделей гидродинамики [1], [2]. В частности, с любой аналитической функцией на комплексной плоскости можно связать решение уравнений Эйлера и Навье–Стокса. Особый класс представляют собой установившиеся безвихревые течения несжимаемой жидкости. Каждому такому течению отвечает потенциал скоростей, являющийся гармонической функцией.

В статье [3] автором была предложена еще одна система уравнений гидродинамики, получившая название квазигидродинамической (КГД). Она является диссипативной, имеет точные решения в задачах Пуазейля и Куэтта и описывает течения слабосжимаемой вязкой жидкости в широком диапазоне параметров. Физические принципы, лежащие в основе теории, изложены в [4], [5]. Полученные к настоящему времени результаты указывают на наличие глубоких и разветвленных связей системы КГД с классическими моделями [6] – [10]. В рамках этого подхода разработаны новые эффективные численные методы [5], [11], [12].

В настоящей работе показано, что с любой определенной в некоторой области пространства гармонической функцией можно ассоциировать точное решение стационарных уравнений КГД, которое будет удовлетворять также системам Эйлера и Навье–Стокса.

1. Квазигидродинамическая система для установившихся течений

Квазигидродинамическая система, описывающая стационарные движения слабосжимаемой вязкой жидкости без учета внешних массовых сил, имеет вид

$$\text{div } \vec{u} = \text{div } \vec{w}, \tag{1.1}$$

$$\rho \text{ div } (\vec{u} \otimes \vec{u}) + \nabla p = 2\eta \text{ div } \widehat{\sigma} + \rho \text{ div } \big[(\vec{w} \otimes \vec{u}) + (\vec{u} \otimes \vec{w})\big]. \tag{1.2}$$

Здесь символом $\widehat{\sigma}$ обозначен тензор скоростей деформаций:

$$\widehat{\sigma} = \widehat{\sigma}(\vec{u}) = \frac{1}{2}\big[(\nabla \otimes \vec{u}) + (\nabla \otimes \vec{u})^T\big].$$

Вектор $\vec{w}$, связанный с вектором плотности потока массы $\vec{j}_m$ соотношением $\vec{j}_m = \rho(\vec{u} - \vec{w})$, вычисляется с помощью выражения

$$\vec{w} = \frac{\tau}{\rho}\Big(\rho(\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} + \nabla p\Big). \tag{1.3}$$

Средняя плотность жидкости ρ, коэффициент динамической вязкости η и характерное время релаксации τ считаются заданными положительными константами. Релаксационный параметр τ определяется по формуле

$$\tau = \frac{\eta}{\rho\ c_s^2}.$$

Символом c_s обозначена скорость звука в среде.

Система (1.1) – (1.2) замкнута относительно неизвестных функций – скорости $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x})$ и давления $p = p(\vec{x})$, где $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$ – заданная точка в пространстве $\mathbb{R}^3_{\vec{x}}$. В ее записи использованы стандартные обозначения из тензорного анализа. Например, диада $(\vec{u} \otimes \vec{w})$ представляет собой тензор–инвариант второго ранга, полученный как прямое тензорное произведение двух векторов $\vec{u}$ и $\vec{w}$. Если $c_s \to +\infty$, то квазигидродинамическая система переходит в классическую систему Навье–Стокса для вязкой несжимаемой жидкости. Аксиомы, лежащие в основе физического вывода системы (1.1) – (1.2), наиболее подробно изложены в [5].

2. Построение точных решений стационарных квазигидродинамических уравнений с помощью гармонических функций

Пусть V – область в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3_{\vec{x}}$, $\varphi = \varphi(\vec{x})$ – определенная на V произвольная гармоническая функция. Как известно, такая функция является непрерывной, аналитической и имеет непрерывные производные всех порядков. Будем трактовать φ как потенциал скоростей и определим векторное поле $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x})$ по формуле

$$\vec{u} = \nabla\varphi. \tag{2.1}$$

Это поле является соленоидальным и безвихревым, поскольку

$$\text{div } \vec{u} = \text{div } (\nabla\varphi) = \Delta\varphi = 0, \tag{2.2}$$

$$\text{rot } \vec{u} = \text{rot } (\nabla\varphi) = 0. \tag{2.3}$$

Давление $p = p(\vec{x})$ вычислим с помощью формулы Бернулли

$$p = A - \rho\frac{\vec{u}^2}{2}, \tag{2.4}$$

где A – произвольная постоянная.

Покажем, что пара функций $(\vec{u}, p)$, определяемых равенствами (2.1) и (2.4), образует точное решение системы (1.1) – (1.2). Вспоминая тождество

$$\nabla\Big(\frac{\vec{u}^2}{2}\Big) = (\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u} + [\vec{u}\times\text{rot } \vec{u}]$$

и учитывая (2.3), будем иметь

$$0 = \nabla\Big(\rho\frac{\vec{u}^2}{2} + p\Big) = \rho(\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u} + \rho[\vec{u}\times\text{rot } \vec{u}] + \nabla p = \rho(\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u} + \nabla p.$$

Символом $\times$ обозначено векторное произведение. Принимая во внимание (1.3), приходим к заключению о том, что

$$\vec{w} = 0. \tag{2.5}$$

Справедлива цепочка равенств

$$\text{div } \widehat{\sigma} = \frac{1}{2}\Big(\Delta\vec{u} + \nabla(\text{div } \vec{u})\Big) = \nabla(\text{div } \vec{u}) - \frac{1}{2}\text{ rot rot } \vec{u}, \tag{2.6}$$

в которой символом Δ обозначен оператор Лапласа. Здесь использовано известное (см. [1], с. 32) векторное тождество

$$\Delta\vec{u} = \nabla(\text{div } \vec{u}) - \text{rot rot } \vec{u}.$$

Из (2.6) с учетом (2.2), (2.3) находим

$$\text{div } \widehat{\sigma} = 0. \tag{2.7}$$

В силу (2.2), (2.5) уравнение (1.1) удовлетворяется тождественно. Представим (1.2) в эквивалентной форме

$$\rho\vec{u}\text{ div } \vec{u} + \frac{\rho\vec{w}}{\tau} = 2\eta\text{ div } \widehat{\sigma} + \rho\text{ div } \big[(\vec{w}\otimes\vec{u}) + (\vec{u}\otimes\vec{w})\big]. \tag{2.8}$$

Левая и правая части (2.8) равны нулю в силу (2.2), (2.5), (2.7) и поэтому совпадают. Таким образом, пара $(\vec{u}, p)$ задает точное решение (1.1) – (1.2).

Замечание. Предложенный метод построения решений применим не только для трехмерных, но и для двумерных уравнений в случае установившихся течений.

3. Иллюстрирующие примеры

Рассмотрим примеры построения точных решений стационарных квазигидродинамических уравнений с помощью гармонических функций.

Пример 1. *Точечный источник (сток) массы.* На множестве $\mathbb{R}^3_{\vec{x}} \backslash \vec{0}$ рассмотрим гармоническую функцию типа ньютонова потенциала:

$$\varphi = -\frac{Q}{4\pi\sqrt{x^2+y^2+z^2}}. \tag{3.1}$$

С помощью (2.1) вычислим компоненты вектора скорости

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{Q}{4\pi}\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \\ u_y &= \frac{Q}{4\pi}\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \\ u_z &= \frac{Q}{4\pi}\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Формула (2.4) позволяет найти распределение давления

$$p = p_\infty - \frac{\rho Q^2}{32\pi^2(x^2+y^2+z^2)^2}. \tag{3.3}$$

Здесь p_∞ – заданная константа.

Построенное решение (3.2), (3.3) описывает пространственное течение от точечного источника (стока) массы интенсивности Q, помещенного в начало координат. В зависимости от знака ($+$ или $-$) величина Q интерпретируется как объем жидкости, выделяемый источником или поглощаемый стоком за единицу времени. Это точное решение системы КГД было выписано в [7] в сферической системе координат.

Пример 2. *Диполь.* Рассмотрим гармоническую функцию

$$\varphi = -\frac{Q}{4\pi\sqrt{(x+d)^2+y^2+z^2}} + \frac{Q}{4\pi\sqrt{(x-d)^2+y^2+z^2}},$$

где Q и d – положительные постоянные. С ее помощью находим компоненты поля скорости

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{Q}{4\pi}\left(\frac{x+d}{\big((x+d)^2+y^2+z^2\big)^{3/2}} - \frac{x-d}{\big((x-d)^2+y^2+z^2\big)^{3/2}}\right), \\ u_y &= \frac{Q}{4\pi}\left(\frac{y}{\big((x+d)^2+y^2+z^2\big)^{3/2}} - \frac{y}{\big((x-d)^2+y^2+z^2\big)^{3/2}}\right), \\ u_z &= \frac{Q}{4\pi}\left(\frac{z}{\big((x+d)^2+y^2+z^2\big)^{3/2}} - \frac{z}{\big((x-d)^2+y^2+z^2\big)^{3/2}}\right). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Поле давления имеет вид

$$p = p_\infty - \frac{\rho}{2}\big(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2\big). \tag{3.5}$$

Зависимости (3.4), (3.5) отвечают течению от диполя, т.е от источника и стока интенсивностей Q и $-Q$, расположенных в точках с координатами $(-d, 0, 0)$ и $(d, 0, 0)$ соответственно.

Пример 3. *Точечный диполь.* Гармоническая функция

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi}\frac{m_x x + m_y y + m_z z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

представляет собой потенциал скоростей течения от точечного диполя с моментом $\vec{m} = (m_x, m_y, m_z)$, расположенного в начале координат (см. [1], с. 279). Составляющие вектора скорости выглядят следующим образом:

$$u_x = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{3x(m_x x + m_y y + m_z z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} - \frac{m_x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\right),$$

$$u_y = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{3y(m_x x + m_y y + m_z z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} - \frac{m_y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\right),$$

$$u_z = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{3z(m_x x + m_y y + m_z z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} - \frac{m_z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\right). \tag{3.6}$$

Давление может быть найдено подстановкой (3.6) в (3.5).

Заключение

Заметим, что все приведенные выше точные решения КГД системы удовлетворяют также классическим стационарным системам Эйлера и Навье–Стокса. Аналогичное утверждение справедливо для любого установившегося трехмерного или двумерного течения с безвихревым соленоидальным полем скорости, порождаемым заданным гармоническим потенциалом. Это свидетельствует о взаимосвязи указанных трех систем.

Перспективным является научное направление, связанное с разработкой новых методов построения точных решений стационарных и нестационарных квазигидродинамических уравнений, выяснением вопросов об условиях их единственности и физической адекватности, сравнением с решениями классических уравнений гидродинамики. Некоторые результаты в этом направлении уже опубликованы в [3] – [10].

Список литературы

[1] Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. — М.: Наука, 1987. — 840 с.

[2] Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Проблемы гидродинамики и их математические модели. — М.: Наука, 1973. — 416 с.

[3] Шеретов Ю.В. О единственности решений одной диссипативной системы гидродинамического типа // Мат. моделирование. — 1994. — Т. 6, № 10. — С. 35–45.

[4] Шеретов Ю.В. Квазигидродинамические уравнения как модель течений сжимаемой вязкой теплопроводной среды // Применение функционального анализа в теории приближений. — Тверь: Твер. гос. ун–т, 1997. — С. 127–155.

[5] Шеретов Ю.В. Динамика сплошных сред при пространственно–временном осреднении. — М.– Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2009. — 400 с.

[6] Шеретов Ю.В. О точных решениях квазигидродинамических уравнений // Применение функционального анализа в теории приближений. — Тверь: Твер. гос. ун-т, 1998. — С. 213–241.

[7] Шеретов Ю.В. Об общих точных решениях уравнений Навье–Стокса, Эйлера и квазигидродинамических уравнений // Вестник ТвГУ. Прикл. мат. — 2010. — Вып. 2(17). — С. 41–58.

[8] Шеретов Ю.В. Квазигидродинамические уравнения и аналитические функции // Применение функционального анализа в теории приближений. — Тверь: Твер. гос. ун-т, 2010. — С. 61–68.

[9] Шеретов Ю.В. Методы построения точных решений квазигидродинамических уравнений // Вестник ТвГУ. Прикл. мат. — 2011. — Вып. 2(21). — С. 5–26.

[10] Шеретов Ю.В. Единственность классического решения основной начально-краевой задачи для квазигидродинамических уравнений // Вестник ТвГУ. Прикл. мат. — 2011. — Вып. 1(20) . — С. 7–20.

[11] Elizarova T.G. Quasi–Gas Dynamic Equations. Berlin–Heidelberg: Springer, 2009. — 286 p.

[12] Жериков А.В. Применение квазигидродинамических уравнений: математическое моделирование течений вязкой несжимаемой жидкости. Saarbrücken: Lambert Academic Publishing, 2010. — 124 с.